ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Т.П.Ф у н т и к о в а

БЕЗЫНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ $(LP)_{2,1}$

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные конгруэнции $(LP)_{2,1}$ пар фигур $\{L, P\}$, где L - прямая, P -точка [1]. Вырожденные конгруэнции $(LP)_{2,1}$ характеризуются соответствием, при котором каждой прямой L прямолинейной конгруэнции (L) соответствует единственная точка P линии (P), полным прообразом которой является линейчатая поверхность $(L)_P$ прямолинейной конгруэнции (L). Конгруэнции $(LP)_{2,1}$ определяются с произволом трех функций двух аргументов.

§1. Торсовые конгруэнции $(LP)_{2,1}$. Конгруэнции K

Присоединим к конгруэнции $(LP)_{2,1}$ канонический репер $R=\{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, имеющий следующую геометрическую характеристику: вершина A репера помещена в ту точку луча L прямолинейной конгруэнции (L), в которой касательная плоскость к линейчатой поверхности $(L)_P$ параллельна касательной $\tilde{\ell}$ линии (P) в соответствующей точке P, конец вектора $\vec{e}_1$ совмещен с точкой P, вектор $\vec{e}_2$ параллелен касательной $\tilde{\ell}$, вектор $\vec{e}_3$ направлен по лучу L прямолинейной конгруэнции (L) и нормирован таким образом, что касательная к индикатрисе вектора $\vec{e}_3$ вдоль линии, соответствующей линейчатой поверхности $(L)_P$, инцидентна плоскости, аффинно-биссекторной относительно плоскости Π_1, проходящей через прямую L параллельно касательной $\tilde{\ell}$ к линии (P) в точке P, и плоскости Π_2, определяемой прямой L и точкой P. Эту плоскость назовем плоскостью Π.

Торсовыми конгруэнциями $(LP)_{2,1}$ назовем такие конгруэнции $(LP)_{2,1}$, у которых линейчатые поверхности $(L)_P$ — торсы.

В этом случае точка A будет являться точкой ребра возврата торса $(L)_P$.

Рассмотрим торсовые конгруэнции $(LP)_{2,1}$, удовлетворяющие следующим условиям: 1/ фокальная поверхность (A) прямолинейной конгруэнции (L) не вырождается в линию или точку; 2/ касательная плоскость к поверхности (A) в точке A параллельна касательной к линии (P) в соответствующей точке P, — и назовем их конгруэнциями K.

Конгруэнции K определяются системой дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\omega^1=0,\ \omega_1^1=0,\ \omega^3+\omega_1^3=0,\ \omega_2^1=a\theta,\ \omega_2^3=c\theta,\\
&\omega_3^2=m\theta+\omega_3^1,\ \omega^3=p\,\omega_3^1,\ \omega_2^2=n\,\omega_3^1+s\theta,\ \omega^2=\ell\theta,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\theta=\omega^2+\omega_1^2$, $p\neq 0$, ω^i, ω_i^j — компоненты инфинитезимальных перемещений репера R, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства и условию эквиаффинности, и существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Введем следующие обозначения: линии $\theta = 0$ на поверхности (A), являющиеся прообразом точек P линии (P), назовем линиями Γ_p и линии $\omega_3^1 = 0$ на поверхности (A), огибаемые прямыми $(A, \vec{e}_2)$, параллельными касательным к линии (P), назовем линиями Γ.

Т е о р е м а I. Конгруэнции K обладают следующими свойствами: I/линии Γ_p, Γ на поверхности (A) сопряжены; 2/торсы прямолинейных конгруэнций $(A, \vec{e}_\alpha)$ ($\alpha = 1,2,3$) соответствуют; 3/прямолинейная конгруэнция (AP) является конгруэнцией Рибокура; 4/линии Γ_p -линии тени на поверхности (A).

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Для поверхности (A) конгруэнции K уравнение асимптотических линий записывается в виде

$$p(\omega_3^1)^2 + \ell a \theta^2 = 0, \tag{2}$$

т.е. линии Γ_p, Γ сопряжены на поверхности (A). 2/Торсы прямолинейных конгруэнций $(A, \vec{e}_\alpha)$ задаются уравнениями $(d\vec{A}, \vec{e}_\alpha, d\vec{e}_\alpha) = 0$, которые в силу системы (I) принимают следующий вид:

$$\theta \cdot \omega_3^1 = 0. \tag{3}$$

3/Справедливость данного свойства следует непосредственно из свойств I и 2.

4/Касательные плоскости к поверхности (A) вдоль линии Γ_p огибаются торсом с образующей $(A, \vec{e}_2)$. Так как для конгруэнции K торсы $\theta = 0$ прямолинейной конгруэнции $(A, \vec{e}_2)$ являются цилиндрическими поверхностями, то линии Γ_p -линии тени на поверхности (A).

Т е о р е м а 2. Если для конгруэнции K справедливо одно из следующих свойств: I/линия (P) является прямой; 2/существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (L) к семейству плоскостей $\{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$; 3/фокальная поверхность (A) прямолинейной конгруэнции (L) является цилиндрической поверхностью, то справедливы и остальные два свойства.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Пусть линия (P) конгруэнции K является прямой, т.е. выполняется условие

$$d\vec{P} = \lambda d^2\vec{P},$$

и, следовательно,

$$a = 0, \quad c = 0. \tag{4}$$

В этом случае уравнение асимптотических линий поверхности (A) принимает вид:

$$(\omega_3^1)^2 = 0,$$

причем

$$(d\vec{A})_{\omega_3^1 = 0} = \ell\theta\vec{e}_2, \quad d\vec{e}_2 = (n\omega_3^1 + s\theta)\vec{e}_2, \tag{5}$$

т.е. поверхность (A) -цилиндрическая.

Также в силу равенств (4) условия аффинного расслоения от прямолинейной конгруэнции (L) к семейству плоскостей $\{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$$\omega^i \wedge \omega_i^3 = 0, \quad \omega_3^i \wedge \omega_i^3 = 0 \quad (i = 1,2) \tag{6}$$

тождественно удовлетворяются, следовательно, указанное расслоение существует.

2/Пусть теперь для конгруэнции K справедливо второе свойство, т.е. выполняются условия (6). Учитывая в квадратичных уравнениях (6) пфаффовы уравнения (I), получаем:

$$c=0\ ,\ a=0\ . \qquad (7)$$

Из условий (7) следует справедливость остальных свойств.

3/Потребуем, чтобы фокальная поверхность (A) прямолинейной конгруэнции (L) являлась цилиндрической поверхностью. Из уравнений (2) и условия $p\neq 0$ следует, что поверхность (A) является цилиндрической, если

$$\ell a=0$$

и

$$d\vec{e}_2=(n\omega_3^1+s\theta)\vec{e}_2+a\theta\vec{e}_1+c\theta\vec{e}_3=\lambda\vec{e}_2,$$

т.е. если

$$a=0\ ,\ c=0. \qquad (8)$$

Из равенств (8) следует справедливость первого и второго свойства.

Т е о р е м а 3. Если поверхность (A) конгруэнции K является средней поверхностью прямолинейной конгруэнции (AP), то: I/фокальная поверхность прямолинейной конгруэнции (AP), отличная от линии (P), вырождается в линию; 2/прямолинейная конгруэнция (L) является цилиндрической, а поверхность (A) -поверхностью переноса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Поверхность (A) является средней поверхностью прямолинейной конгруэнции (AP) при условии

$$\ell=\tfrac{1}{2}\ . \qquad (9)$$

Тогда вторым фокусом луча этой конгруэнции, отличным от точки P, является точка $\vec{F}=\vec{A}-\vec{e}_1$. Учитывая условие (9) в системе уравнений (I), получаем следующие соотношения:

$$m=0\ ,\quad s+a-\tfrac{1}{2}=0\ . \qquad (10)$$

В силу равенства (9)

$$d(\vec{A}-\vec{e}_1)=2p\,\omega_3^1\vec{e}_3,$$

т.е. фокальная поверхность (F) вырождается в линию.

2/Так как

$$(d\vec{e}_3)_{\omega_3^1=0}=-\theta s\vec{e}_3,$$

то торсы $\omega_3^1=0$ прямолинейной конгруэнции (L) являются цилиндрическими поверхностями, а линии Γ на поверхности (A) -линиями тени. Таким образом, на поверхности (A) имеем сопряженную сеть линий тени: Γ, Γ_p, т.е. поверхность (A) поверхность переноса. Теорема доказана.

Конгруэнции K, обладающие свойствами, указанными в теореме 3, существуют с произволом четырех функций одного аргумента. Такие конгруэнции назовем конгруэнциями K_1.

§ 2. Безынтегральное построение конгруэнций K_1

Основываясь на свойствах, указанных в теореме 3, дадим один из способов построения произвольной конгруэнции K_1 [2].

Чтобы построить конгруэнцию K_1, следует взять произвольную прямолинейную конгруэнцию с двумя вырождающимися в линии фокальными поверхностями. Тогда поверхность, описанная центром луча заданной прямолинейной конгруэнции, и одна из фокальных линий будут составлять конгруэнцию K_1 .

Докажем это предположение.

Пусть задана произвольная прямолинейная конгруэнция (A_0A_1) с вырождающимися в линии фокальными поверхностями (A_0), (A_1). Отнесем эту конгруэнцию к подвижному реперу $R=\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, вершину A которого поместим в центр луча прямолинейной конгруэнции (A_0A_1), вектор $\vec{e}_1$ направим по этому лучу и конец его совместим с фокальной точкой A_1 луча, векторы $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ направим по прямым, параллельным касательным, к линиям (A_1), (A_0) в точках A_1, A_0.

В построенном репере

$$d\vec{A}_1=\lambda\vec{e}_2,\quad d\vec{A}_0=\mu\vec{e}_3,$$

т.е.

$$\omega^1+\omega^1_1=0,\ \omega^3+\omega^3_1=0,\ \omega^1-\omega^1_1=0,\ \omega^2-\omega^2_1=0. \tag{11}$$

Из уравнений (II) следует, что

$$\omega^1=0,\quad \omega^1_1=0,$$

$$\omega^2\wedge\omega^1_2=0,\ \omega^3\wedge\omega^1_3=0,\ \omega^3\wedge\omega^2_3=0,\ \omega^2\wedge\omega^3_2=0. \tag{12}$$

Нормируя вектор $\vec{e}_3$ таким же образом, как и у конгруэнции $(l,P)_{2,1}$ в §I, и раскрывая квадратичные уравнения (I2), получаем систему дифференциальных уравнений (I) и условия (9), (I0), которые определяют конгруэнцию (A_0A_1).

Следовательно, высказанное предположение о построении произвольной конгруэнции K_1 оказалось верным.

Список литературы

I. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, I973, с.4I-49.

2. Гринцевичус К. О линейных неголономных комплексах.- "Литовский матем. сбор.", I974, т.I4, №2, с.3I-4I.